学校编码: 10384　　　　　　分类号: ________ 密级: ________

学　　号: 19020090153601　　　　　　UDC: ________

厦门大学

博　士　学　位　论　文

Banach空间凸子集生成的赋范半群的对偶表示理论及其应用

Representation Theory of the Duals of Normed Semigroups Generated by Convex Sets of Banach Spaces and its Applications

周宇

指导教师姓名:　程立新 教授

专 业 名 称:　基 础 数 学

论文提交日期:　2012年 4 月

论文答辩时间:　2012年 6 月

学位授予日期:　2012年 　月

答辩委员会主席: ____________________

评　阅　人: ____________________

2012年 　月

Doctoral Dissertation

Representation Theory of the Duals of Normed Semigroups Generated by Convex Sets of Banach Spaces and its Applications

By

Supervisor:

Specialty:

Institution: School of Mathematical Sciences

Xiamen University

Xiamen,P.R.China

April, 2012

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（ ）课题（组）的研究成果，获得（ ）课题（组）经费或实验室的资助，在（ ）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）:

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于:

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　年　月　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打”√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）:

年　月　日

中文摘要

Banach空间X中的凸子集，如球族，紧凸子集，弱紧凸子集，超弱紧凸子集(其定义见[5])等的几何和拓扑性质在Banach空间理论的研究中具有重要的地位和作用。具有某些特殊性质的有界凸子集的全体(如紧凸子集的全体，弱紧凸子集的全体等)，在赋予通常意义下的加法和数乘运算，以及Hausdorff度量后具有良好的代数结构和拓扑性质，激发了众多数学工作者的广泛兴趣。

本文考虑Banach空间的上述凸子集所构成的赋范半群及其对偶空间，致力于研究赋范半群的对偶表示理论，通过锥等距嵌入的方法和利用DC函数空间的稠密性，本文证明了如下的主要结论。

(I)分别给出了由Banach空间X的全体紧凸子集，弱紧凸子集，超弱紧凸子集，球生成集所构成的赋范半群$cc(X)$，$wcc(X)$，$swcc(X)$，$b(X)$ 的对偶空间的表示定理，即：

$$cc(X)^* \cong C_{PH}(B^*_{w^*})^*;\ \ wcc(X)^* \cong C_{\Delta \mathrm{SFSD}}(B^*)^*;$$

$$\mathrm{swcc}(X)^* = C_{\Delta \mathrm{SUFD}}(B^*)^*;\quad C(B_{X^*}, w^*)^* \cong b(X)^*.$$

(II)作为赋范半群的对偶空间的表示理论研究过程中所得到的辅助结论和应用，我们还证明了

(1)经典Weierstrass定理在任意紧度量空间上的推广的结论，即：

存在Banach空间$S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$，$S$线性等距于与$C[0,1]$，使得对于任意的紧度量空间$\Omega$，存在$S$的紧集$K_\Omega$，存在满等距$T: K_\Omega \to \Omega$，满足对于任意的连续函数$f \in C(\Omega)$，对于任意的$\epsilon > 0$，存在$n \in \mathbb{N}$，存在$n$-多项式函数$P = P(s_1, s_2 \cdots, s_n)$，使得

$$|f(T(s)) - P(s_1, s_2 \cdots, s_n)| < \epsilon, \forall s = (s_1, s_2 \cdots, s_n) \in K_\Omega,$$

(2)Δ-凸多面体支撑函数在w^*紧集上可一致逼近w^*连续的正齐次函数，

(3)以及在任意局部凸空间L上，Δ-有限仿射取大函数在紧集$K \subset L$上可一致逼近连续函数。

关键词: DC函数　赋范半群　Fréchet可微　(超)弱紧集　Banach 空间

Abstract

The geometric and topological properties of convex sets of a Banach space, such as balls, compact convex sets, weak compact convex sets, super weak compact convex sets(see[5] for the definition) play an important role in the study of Banach space theory. Some specific classes of convex sets, with the addition operation and the scalar multiplication operation, endowed with Hausdorff metric, have excellent algebraic structure and topological properties, which have brought mathematician's interests. In this paper, we consider normed semigroups generated by convex sets mentioned above and their duals. We mainly focus on the representation theory of their dual. Making use of discussions of cone isometric embedding and the density property of DC functions spaces, we obtain the following main results.

(I) Given a Banach space X, we show dual representation theorems of normed semigroup $cc(X)$ generated by compact convex sets, $wcc(X)$ by weak compact convex sets, $swcc(X)$ by super weak compact convex sets and $b(X)$ by sets of convex hulls of finitely many balls respectively, that is the following representation theorems

$$cc(X)^* \cong C_{PH}(B^*_{w^*})^*; \;\; wcc(X)^* \cong C_{\Delta\mathrm{SFSD}}(B^*)^*;$$

$$\mathrm{swcc}(X)^* = C_{\Delta\mathrm{SUFD}}(B^*)^*; \quad C(B_{X^*}, w^*)^* \cong b(X)^*.$$

(II) We also show the following assisted results and applications in the research of the duals representations of normed semigroups,

(1) We extend the classical Weierstrass theorem to arbitrary compact metric spaces,

which is as follows,

There exists Banach space $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $S \cong C[0,1]$, such that $\forall$ compact metric space Ω, $\exists$ compact set $K_\Omega \subset S$ and there exists surjective isometry $T : K_\Omega \to \Omega$, such that $\forall f \in C(\Omega)$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists n$-polynomial function $P = P(s_1, s_2 \cdots, s_n)$, such that

$$|f(T(s)) - P(s_1, s_2 \cdots, s_n)| < \epsilon, \forall s = (s_1, s_2 \cdots, s_n) \in K_\Omega.$$

(2) An arbitrary w^* continuous positively homogenous function can be uniformly approximated by Δ-convex polyhedron support functions on arbitrary w^* compact set.

(3) In any locally convex space L, Δ maximum of finite continuous affine functions can uniformly approximate continuous function on any compact set $K \subset L$.

Key Words: DC functions; normed semigroup; fréchet differentiability; (super) weakly compact set; Banach spaces

目　　录

Contents

第 一 章 绪　　论

§1.1 有界凸子集生成的赋范半群及其对偶空间

对Banach空间的各类凸子集，如单位球，紧凸子集，弱紧凸子集等的研究是对Banach空间理论研究的局部化，凸子集的各种几何和拓扑性质与Banach空间的性质等存在重要的联系，如著名的James定理给出了Banach空间X为自反空间的特征，X为自反的等价于每个连续的线性泛函在X的单位球$B(X)$上范数可达，著名的MIP的特征定理，即Banach空间X具有MIP(Mazur Intersection Property)，等价于X^*的单位球的w^*-可凹点在$S(X^*)$中稠密，最近Cheng及其合作者[5]引进超弱紧集的概念，证明了Banach空间的有界闭凸子集A为超弱紧集的等价于A可一致凸化，这一结论是Enflo定理[26]，即超自反空间等价于可赋等价一致凸范数的局部化，因此研究Banach空间各类凸子集对Banach空间理论有着重要的丰富和推动作用。

将某些特殊类凸子集的全体作为一个整体的研究一直是众多数学工作者的研究兴趣所在，例如：[31]研究紧凸子集空间的锥等距嵌入，[5]中引进了超弱紧凸子集，给出超自反空间可赋等价一致凸范数的局部化结论，[18]把经典的不动点理论的结论推广到w^*-紧凸子集超空间中等。

由于凸子集较好的代数性质，凸子集的全体对于通常意义下集合的加法($A+B=\{a+b,\ a\in A,\ b\in B\},$)和数乘($\lambda A=\{\lambda a,\ a\in A\}$)运算具有较好的运算法则，如Banach空间凸子集的全体对于上述集合的加法和数乘运算封闭，并且加法满足交换律(因此凸子集的全体在上述加法运算意义下就构成一个Abelian半群)；非负数的加法运算和凸子集的乘法运算具有分配律，即$(\lambda_1+\lambda_2)A=\lambda_1 A+\lambda_2 A,\quad \lambda_i\geq 0,\ i=1,2$；有界凸子集之间可以赋予Hausdorff度量($d_H(K_1,K_2)=max\{sup_{x\in K_1}d(x,K_2),sup_{y\in K_2}d(K_1,y)\}$)，从而有界凸子集的全体赋予Hausdorff度量d_H后就成为了度量空间。凸子集的全体所具有诸如此类良好的代数结构和拓扑结构启发我们从半群的视角出发，引进赋范半群的概念，其定义如下。

定义 1.1 设$\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$，如果Abelian半群$G$上存在两个运算$(1):(x,y) \in G \times G \to x+y$；$(2)(\alpha, x) \in (\mathbb{F} \times G) \to \alpha x \in G$满足

$$(\lambda\mu)g = \lambda(\mu g),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}\ \ g \in G;$$

$$\lambda(g_1 + g_2) = \lambda g_1 + \lambda g_2,\ \forall \lambda \in \mathbb{F}\ \ g_1, g_2 \in G;$$

$$1g = g \qquad 0g = 0\ \ \forall g \in G.$$

则称G为模。 模G上如果能赋予以范数，则称模G为此范数意义下的赋范半群，简称为赋范半群。

需要指出的是，已有前人对赋范半群进行了研究，前人们习惯于称赋范半群为空间(space)，[31]紧凸子集空间，[11]有限维欧氏空间的紧凸子集空间，或者超空间(hyperspace)，如[18]w^*-紧凸子集超空间等。

下面介绍一些赋范半群的例子。

例 1.2 对于任意的Banach空间X，设

1. Banach空间X本身；
2. $cc(X)$表示X中所有非空的紧凸子集；
3. $wcc(X)$表示X中所有非空的弱紧凸子集；

对于上述三类集族赋予通常意义下的加法和数乘：$K_1 + K_2 = \{k_1 + k_2 : k_1 \in K_1\ and\ k_2 \in K_2\}$ and $\lambda K = \{\lambda k : k \in K\}$，则分别为模。分别赋予Hausdorff度量$d_H$，i.e.,

$$d_H(K_1, K_2) = max\{sup_{x \in K_1} d(x, K_2), sup_{y \in K_2} d(K_1, y)\}$$

该Hausdorff度量诱导出一范数$\|\cdot\|_H$，

$$\|K\|_H = d_H(0, K) = sup\{\|k\| : k \in K\}.$$

因此X，$cc(X)$，$wcc(X)$，在分别赋予上述范数之后，就构成赋范半群， 分别称为是由X的单点集，紧凸子集，弱紧凸子集生成的赋范半群，在不引起歧义的前提下，简称为赋范半群。

众所周知，Banach空间的对偶理论在Banach空间理论的研究中有着重要的地位和作用，那么如何建立与赋范半群紧密联系的赋范半群的对偶空间理论就是研究赋范半群的一个重要组成部分。首先回顾赋范半群的对偶空间定义如下：

定义 1.3 称定义在赋范半群G 上的泛函ϕ为线性的，如果

$$\phi(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha\phi(g_1) + \beta\phi(g_2),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \cup 0\ \ g_1, g_2 \in G.$$

称ϕ为有界的，如果 $\|\phi\| = sup\{\phi(g) : g \in G, \|g\| \leq 1\} < \infty$，用$G^*$表示定义在$G$上的所有有界线性泛函的全体赋予上述范数构成的Banach空间，称为赋范半群G的对偶空间，在不引起歧义的前提下， 简称为赋范半群的对偶空间。

值得一提的是，我们这里定义的赋范半群的线性泛函和赋范空间的线性泛函是不一致的，我们定义的赋范半群的线性泛函只满足正齐次性，而不要求其满足齐次性，i.e.，$\phi(\alpha g) = \alpha\phi(g), \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \cup 0$，主要原因在于：例如，如果要求定义在由紧凸子集构成的赋范半群$cc(X)$上的线性泛函ϕ满足齐次性，则对于任意的非单点集的紧凸子集$A \in cc(X)$，$\phi(A - A) = 0$，而$A - A \neq 0$，因此如此定义的紧凸子集赋范半群$cc(X)$的对偶空间不具有分离性。这不是本文考虑的内容。

由例1.2，赋范空间为赋范半群，赋范空间X中所有紧凸子集$cc(X)$，所有弱紧凸子集$wcc(X)$等在赋予通常意义下的加法和数乘($A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}, \lambda A = \{\lambda a, a \in A\}$)运算以及Hausdorff度量后也构成赋范半群，并且此类赋范半群自然地包含了该赋范空间X。因此赋范半群的本身种类是非常丰富的。赋范半群和赋范空间是不同的，如Banach空间中所有紧凸子集在上述运算意义下构成的赋范半群中任何非单点集的紧凸子集都不具有逆元。因此在赋范半群$cc(X)$中，未必每个元素都有逆元，再者，数的加法运算和赋范半群的元素的乘法运算是不具有分配律的，取Banach空间X的任意对称的非单点的紧凸子集A，$\forall \lambda_1 > 0 > \lambda_2$，则$(\lambda_1 + \lambda_2)A \neq (\lambda_1 - \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$。这些就构成了赋范半群和赋范空间的本质上的差异。但另一方面，赋范空间是特殊的赋范半群，赋范半群和赋范空间都具有一些共性，如Keimel和Roth(见[11] p.30)证明了局部凸锥中类似于Hahn-Banach定理的结论Sandwich定理([7]提供了一个类似的

结论)，Pavlov将赋范半群应用于非交换微分几何(见[22])得到众多精彩的结论。因此赋范空间中已有的结论对赋范半群的研究具有深刻的指导和借鉴作用，例如，Radstrom(见[31])证明了任意Banach空间X的所有紧凸子集$cc(X)$，赋予Hausdorff度量后所构成的度量空间，都可保持加法和非负数乘运算等距地嵌入一实赋范空间，即：

定理 1.4 (Radstrom) *令X为实Banach空间，$(cc(X),h)$表示X中所有紧凸子集赋予Hausdorff度量构成的度量空间，则存在赋范空间Y，存在$T:(cc(X),h)\to Y$，使得$\forall A,B\in cc(X)$，$\forall\lambda\geq 0$，$\|T(A)-T(B)\|=h(A,B)$，$T(\lambda A)=\lambda T(A)$，$T(A+B)=T(A)+T(B)$。*

台湾学者T.Hu将紧凸子集，弱紧凸子集，弱星紧凸子集赋范半群应用于不动点理论的研究已得到许多与经典结论类似的结果(见[18]，[19]，和[20])。Balashov和Repovs证明了在Hilbert空间中，任意的具有二阶凸性模的一致凸集都可表示成一族半径固定的闭球的交，实质上，这里的一致凸集是在赋等价范数意义下是保持的(等价拓扑不变)，这种一致凸集与Banach空间的MIP 具有紧密的联系。这种一致凸集在通常意义下的加法和数乘运算下是封闭的，赋予Hausdorff度量后也构成了赋范半群。这种拓扑不变的一致凸集构成的赋范半群的对偶空间的表示，正是我们目前所考虑的问题之一。

§1.2 本文的主要方法和结果

本文所利用的主要工具为DC函数(difference of convex functions或Δ-凸函数)，我们的主要方法是对于给定的某赋范半群G，首先通过锥等距f将G嵌入一Banach空间Y，然后在Y中将$f(G)$生成Y的子空间$f(G)-f(G)$，最后证明$f(G)-f(G)$在Y的某子空间Y_0中稠密，因此得到G的对偶空间与Y_0的对偶空间等距同构，即：$G^*\cong Y_0^*$。$f(G)-f(G)$在Y_0中稠密是难点所在，利用DC函数空间的稠密性能较好地解决这一困难。因此我们还需要介绍本文所需要的关于DC函数的必要的预备知识。

称定义在拓扑空间的凸集K上的函数f为DC函数，如果f可表示成两个连续的凸函数的差，即：$f=g-h$，g,h都是连续凸函数(见[33]，[34]，或[28])。在任意赋范空